經濟理論の數學的基礎

酒井彦四郎

本文は、ザ、クウォータリ、ヂアーナル、オヴ、イーカノミクス、第六十三卷、一九四九年二月、第一號（THE QUARTERLY JOURNAL OF ECONOMICS Vol LXIII February, 1949 No. 1）に出ているランダン、スクール、オヴ、イーカノミクス(LONDON SCHOOL OF ECONOMICS)のアー、デー、ディ、アラン(R. G. D. ALLEN)教授の論文「經濟理論の數學的基礎」（THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF ECONOMIC THEORY）についてのささやかな研究であるが、アランを傷つけることがなければ幸いである。

一、一般評論—數學の使用

ヒックスによるものとサミュアルサンによるもの

數理的方法は經濟理論の發展においては相應しく、且つ役に立つように用いられる事は、もはや少しも疑念はない。疑問は、どちらかといえば、數學は終局叙述においては斥ぞけられるべきか、又は主論においてはその席につくべきかである。數學は眞に建築物の建築足場か鋼鐵製の骨組を形造るか？

マーシャル（Marshall）は彼の理論を組立てるのに彼を助ける一つの建築足場として數理的方法——比較的に簡單なもの——を用いた。その方法は彼が終えてしまつた時は斥ぞけられた。例の「原理（プリンシプルズ）」（Principles）はこの事の爲に損害を蒙つている、と私は考える。即ち、もし我々が更に多數の數理的論究に會うことが許されたとしたならば、我々はより少しの曖昧な論點と總じてもつとしつかりした叙述を見つけたであろう。何れにせよ。主要點はマーシャルと多數の

同時代の人々は極く簡單な數理論で滿足したことと經濟學の中に數學を用いることは其の後規模においても複雜においても發展したことである。數學が多數の理論家によつて取扱われている態度は彼等は議論を欠陷のある儘にして置くことと例えば「…なることは証明することが出來る」のような多數の語句を殘すのでなければ斥ぞけることが出來ぬというような事である。

しかしながら、數理的展開を附錄に限定することは今でも可能である。完成される建築物は漠然とした言葉で叙述することが出來て、組立ての明細が示されねばならぬ時は――建築物が鋼鐵製の骨組を持つことを知ることが重要な時は――その時は特殊事項の附錄に付託させることが出來る。これはヂェイ、アー、ヒックス（J. R. Hicks）によつて、特に「價値と資本」（Value and Capital）の中に採用された方法である。それは重要な改訂と(1)附加とを入れた第二版となつて現われている。それは、確かに、ヒックスのような一人の名技工の手になる一つの本望を達した方法である。

(1) J. R. Hicks: Value and Capital（第二版、Oxford 大學出版、一九四六年）

今一つの可能性は數學の本文中えの編入であつて、この方法はピー・エイ・サミュアルサン（P. A. Samuelson）によつて、彼の近頃出版された「經濟分析の基礎」(2)（Foundation of Economic Analysis）の中に適切に説明されている。此所には建築物は土台から、順序を逐うて、築き上げられる。ビルディング（building）の鋼鐵製の骨組の中に、最も困難な數學が早く來る時は、それこそそうあるべき途なのである。骨組が盡きるまでは賞讃されるような文飾が其處にはない。サミュアルサンの書物はヒックスのよりも世間一般の希求がより少いかも知れぬが、しかしそれはそれにも拘わらず非常に重要である。名前に相應しい經濟理論家は皆それを嚴密に吟味するための眞面目な努力をするであろう。

(2) P. A. Samuelson: Foundations of Economic Analysis（Harvard 大學出版、一九四七年）

ヒックスとサミュアルサンのこの二冊の書物は同一主題、即ち經濟理論の基礎を多量に持つている。其等は多量に同一原理に從つている、その原理は私は確かに間違いのないものと考える。其等は同時に、特に彼等各自の論文の歴史的發展に徴して研究されねばならぬ。一九三七年又は一九三八年以來、各著者は彼の理論を再び形造りそれを流暢にしている――戰前はかなり廣汎な形体をとつていたが――そうして各人は今一人の著作によつて（あいにく、地理學的意味で

はむしろ遠く離れて影響されたけれども）感化された。今や彼等は要件に關しては意見が一致してしまつた。將來の發展は、ヒックスの又はサミュアルサンのではなくて二つの叙述の折合つた結合から發するであろう、と私は考える。經濟理論における研究科の課程や專攻科目は來るべき何年間かはこの發展に關係させられるであろう。

しかしながら、ヒックスとサミュアルサンは彼等の書物を書くことでは異つた目的を考えていた。ヒックスは一つの完全な理論ではないにしても、少くともある特別な近似線の十分な發展を仕遂げようと試みる。彼はよし彼の結論の若干が他物そうして多分よりよい方法によつて達せられたとしても氣がかりではない。サミュアルサンの目的は數學的原則の基礎をなしている普通の事物を示すことによつて經濟理論の種々の分野を統一することである。彼は如何にして結論が達せられるか、何に對して正當であり又何が種々の理論において誤つているかに最も關心をもつている。

サミュアルサンは演算の即ち意味深長な結論、即ち、少くとも理想的條件で、經驗的資料によつて確認されたか反証された結論に注意を集中する。彼の主要統一原理はこのような結論は、均衡の**方程式**（equation）からでなくて、一つの極大（極小）點を保証するか又は安定のために要求される**不等式**（inequalities）から演繹されるべきであるという事である。彼が爲すもう一つの點は、多變數における同時の變化を取扱うことは、正しく一、二における如く容易であり、又時としては一層容易であるという事である。ワルラス（Walras）とパレート（Pareto）の功績は多變數の均衡の實質上の簡單を示すことであつた。サミュアルサンの數學的技術はワルラスの及びパレートの以上であつて多變數變化又は變換、ヒックスの(3)比較靜學の非數理的叙述中に多少失われている或る物、を容易に取扱つている。第三點は結果は有限變化と不連續函數一流の文句で、そうして微分又は連續形式でばかりでなく、得られ、屢々容易に得られるということである。如何にも、もし結論が經驗的資料に適う筈ならば、これは殆んど本質的である。

（3）ヒックスの叙述は構成分の價格が比例して變化するといふ假定の上に組合せ財の概念に用いる事によつて可能ならしめる。

次には、ヒックスのように、サミュアルサンは比較靜學、即ち、例えば、もし需要が上の方へ轉ずるなら、價格は增すか？のような問題に對する答に多く關係している。更に、彼はそれについては余り言われていない一つの分野、即ち比較動學に恐らく達せられるであろうそれの大要へ行く。我々が自然に靜學から比較靜學へ發展しそしてその時多少比較

的優れ一層眞に迫つた動學と呼ばれるいくらか異つたものの中へ導くことが屢々考えられる。サミュアルサンは靜學と動學は經濟体系の定式化に歸すると力說する。更に、時を含むすべての定式化は動學的ではない、一つの靜學的体系は容易に長期又は歴史的變動を包含することが出來る。結局、靜學と動學とは全然別種の分析の分枝として引續いてある事は出來ない、とサミュアルサンは主張する。比較靜學は一つからもう一つへの推移の道に關せず一つの均衡點をもう一つのものとの比較として定義することが出來る。これは少しも動學的定式化を包含するようには思えぬ。しかしサミュアルサンは比較靜學における意味深長な結論は均衡點の安定條件から出ることを示す。そしてこれらは如何なる事情によつて均衡からの一變位が均衡への一復歸（恐らくは振動的）によつて辿らされるであろうかを示す一つの動學的模型からのみ得られる。

サミュアルサンの書物の全貌を取扱うことはどの評論雜誌でもちよいと可能ではない。左の諸節において、私は私に偶然に興味を持たせるある根本問題に集中する。私はこの書物を經濟學者に對しかかる本質的な讀物にさせることは彼の經濟學的識見よりもむしろサミュアルサンの數學的取扱であることを加えたい。過去幾年も經濟學者を苦しめた多數の事柄はサミュアルサンの荒しつつある分析においては非常に簡單に現われる。彼は眞に見當違い(4)であるものを逐拂うことには全く容赦がない。

（4） ここはかなりの（比較的に取るに足らぬ）苦情を記入する場所かも知れぬ。サミュアルサンは彼の書物を編纂する事や校正する事には明らかに緻密ではなかつた。數多くの誤植や不圖した誤りがある。あるものは全く惑わされる處のものであり、又前後見出しの方法も不十分である。彼は時には彼の言葉の用い方の中に判然ならざる所があり、又彼は例えば "monotonicity"（一二頁）のような奇怪な調製物を我々に使わずにおいて十分よかつた。彼は必ずしも數學の方面に巧みではなくて虻蜂取らずの傾向をもつ。彼の數學的處理は經濟學者にとつては十分簡單化されていないし、又數學者を滿足せしめるためには十分に嚴密でない。（一つの小さい例として六五頁乃至六六頁に、彼は「これは二つの方法で嚴密に證明することが出來る…」（"This can be proved rigorously in two ways..."）といふ。しかし彼は第二の證明に來る時は彼は「より嚴密に…」（"More rigorously..."）を始める。彼のあゆみあいは彼のマトリックス（matrix）代數の取扱いにおいて特に意に滿たない。彼はマトリックス記號法を明細な説明をしないで、脚註におくように決心したように思われる。遺憾なことには、マトリックスはどちらかといえば取亂した混亂し

た狀態で本文中へ還いもどる傾向があつた。經濟學者に適合したマトリックス代數に關する本文は下手に必要とされているし、又サミュアルサンは二次形式と定差方程式とを吟味するための第三數學的附錄を加えなかつたとはなさけない。

二、費用と生產とのサミュアルサンの取扱い

サミュアルサンの著作の最も決定的な部分は費用と生產に關するものと消費者需要の理論に關するものとである。ここにおいて彼は現存の理論を統一し、單純にし、系統を立てる彼の試みにおいて疑なき成功をしている。過去の經濟學者の精神を働かせた多くの組立てと概念とは、或は叙述の目的のためを除いては、大した事でないことが示される。一次齊次生產函數、消費者余剩、及び「貨幣（"money"）の限界效用一定の假定は一層注意する價値のある偶然の一部分に過ぎない。或る人はそれらを蘇生せしめることを望むかも知れぬが、非常に効力の強い回復力あるものが必要とされるであろう。サミュアルサン彼自身はそれらには殆んど用がない。彼は消費者の選好尺度に關する「積分可能性」（"integrability"）條件についてのみ多少何處までも不確かである。そしてそれは（一經濟學者としては）彼は除去することを好んだであろうが（一數學者としては）彼は全く不問に付することは出來ない。

サミュアルサンは彼の生產の理論の取扱いにおいてヒックスと意見を異にする。彼はそれを消費者需要の理論の、前に取扱い、後には取扱わない。彼は一つの順序を逐うての分析でそれを表わしている、そしてそれはヒックスのより一般的ではあるがより形式的な方法と對照をなしている。たとい、個人として、私はどちらかといえばサミュアルサンのを取るとはいえ、兩者の取扱いの余地がある。彼の分析は經濟學者を苦しませそして激烈な論議の題材であつた事柄を一層了解を易からしめる。「純粹な」（"pure"）競爭の含まれている意味、「合計すること」（"adding up"）の問題及び生產函數における不連續性の問題が實例である。サミュアルサンは企業は唯一つの生產物をもつと假定する、彼は結合生產の場合への明白な擴張を指摘したのも尤もである。

分析における階段は、(1) 與えられた生產高（output）に對し費用を極小にする收受量（inputs）の結合（企業へ與えられた價格で）、(2) 企業に對する純收入を極大にする生產高の選擇、及び (3) 一企業の其他の產業への外部關係、

である。初めの二つは混淆させられるが、第三は異つた問題を持ち上げ分別されねばならぬ。

(1)に對して一つの實例として、私はまず必ずしも正しく評價されない一つの數學的論點を立証したい。唯一つの拘束條件付の極大（極小）の問題は常に同一結果を持ち合わせの二つの方法で提出される。一般の規則として、一つの函數の極大（極小）は一つの第二の函數の不變の條件付で搜し求められる。これは第一の一つの一定値の條件付で第二の函數の極小（極大）を與える事に變えることが出來る。例えば、$x=x(v_1,v_2,\dots\dots,v_n)$を一企業の生産函數及びを$y=y(v_1,v_2,\dots\dots,v_n)$を費用函數とする、但しすべての$v$は收受量とする。右に提出されたように、(1)階段は與えられたxに對してyを極小にすることである。解は$y-\lambda x$を極小にすることによつて得られる、但しλは一つのラグランジ(Lagrange)の乘數である、即ち

$$x\,(v_1,v_2,\dots\dots,v_n)=x=\text{一定}$$

$$\frac{dy}{dv_i}=\lambda\frac{dx}{dv_i}\qquad(i=1,\ 2,\dots\dots,n)$$

と共に

これはyとすべてのvをxの（及び$\frac{dy}{dv_i}$である與えられた收受量價格の）函數として與える。他に採るべき定式化は一つの與えられたyに對してxを極大にすることである。（與えられた費用における極大の生産高。）ここでは我々は$x-\mu y$を極小にする、即ち

$$y\,(v_1,v_2,\dots\dots,v_n)=y=\text{一定}$$

$$\frac{dx}{dv_i}=\mu\frac{dy}{dv_i}\qquad(i=1,\ 2,\dots\dots,n)$$

と共に

そしてこれはxとすべてのvはy（及び收受量價格）の函數として與える。結果は最初と同一である、それは$\mu=\frac{1}{\lambda}$と置きyの一つの函數としてのxをxの一つの函數としてのyの中へ換位して得られる。

(1)と(2)とを綜合した階段において、一つの連續的な生産函數に對して、得られる少數の意味深長な結果の一つは$\frac{dv_i}{dw_i}<0$但しw_iは收受量v_iの價格である。企業の一つの收受量の使用はその收受量の價格が增す（他の收受量價格

は一定）につれて減ずる。これが連續の場合である。しかしもしある不連續性が假定されるならば、企業の經營の分析において、又は解釋において殆んど困難が發見されない。その時は有限差が微分又は偏微分係數に代り、そして意味深長な結果は $\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i \Delta w_i \leqq 0$ として現われる。もしすべての收受量價格が高まるか不變のままである（$\Delta w_i \geqq 0$）ならば、その時は使用される額はすべては增加することは出來ぬ。この類の條件の持つ一つの困難は等號を落すとか保持することかについては確かであることである。（サミュアルサンはこの點に關して必ずしも批判しないでもない。）ここでは等號が必須である。我々は使川される一つの收受量の額はもしその價格が上る（他の價格は不變を保つものとして）ならば減ずるであろうとは完全には言うことが出來ない。不連續の場合には、一つの收受量の使用における如何なる變化もその價格における騰貴を隨う事には常にあてがある。

サミュアルサンは外力が企業の上に加えられる時に一次齊次生産函數と (3) 階段の分析に對する特別な關係について、「合計すること」の問題について言う事に多量に頭のよさをもつ。多くの經濟學者は一次齊次生産函數によつて、「純粹な」競爭の下に極小單位費用の達成によつて及び純收入（又は利潤）零をもつ生産物の完全な分配によつて魅惑されるように思われる。ここに全くの混亂がある。先ず其の一つを擧げるなら、一つの U 型單位費用曲線（即ち苟くも一つの極小を有する一つの曲線）はそれに對しては單位及び限界費用が共に一定である一つの一次齊次生産函數とは兩立しない。サミュアルサンはこの混亂を如何なるものも一つの剩余と殘らないものをもつ「限界生産力があること」（marginal productivity）の語で萬事を説明する欲求に歸する。更に、我々が完全な分配を欲するとしたところで、それをすべての收受量において（一次齊次生産函數を用いてのように）求める必要はない、一つの生産高において（單位費用が一つの極小である處の）それを得るに足る。

第一の結論は一つの一次齊次生産函數の假定は一般的の意味の外數學的な意味での「特異な」（"singular"）である非常に特殊な場合としてを除いては、棄てらるべきであるということである。もし我々がすべての因子の使用を二倍にする時何故生産高を二倍にしないかのある説明が要ると我々が感ずるならば、我々は生産函數の中に、すべての「因子」（"factor"）ではなくて、可測の經濟財と用役とに限定された「收受量」（"inputs"）のみを含むことは我々は恐らくサ

ミュアルサンに同意するであろう。又は我々は企業は「生産尺度を限定し、且つそれへ余剩が(5)總收益として負わすことが出來る或る定まつた生産的機會を有する」("possesses some fixed productive opportunity which limits the scale of production, and to which the surplus can be imputed as earnings") とのヒックスの假定を恐らく引用するであろう。又は我々は恐らくチェイムバリン (Chamberlin) に從つて、初めはより大なる收受量全体、增加した專門化及び工業經濟學が支配するかも知れぬのに、結局彼等は(6)調整の騰貴費用による差引勘定以上であろうことを主張するであろう。

(5) 前揭引用書二三二頁

(6) E. H. Chamberlin, "Proportionality, Divisibility and Economics of Scale" 本誌、二月一九四八年。若干の因子を取除くサミュアルサン、及び一定にするヒックスに比して、チェイムバリンはすべての因子は可變で、且つ生産函數に含まれるより一般の場合を考慮しているらしい。しかしながら、叙述中を除き、彼は他の人々と意見が合わぬかどうか。彼等の中で誰か以下に反對するであらうか?

企業の理論は、もしそれがその構成の中で作るならいくらの調整でも、同位保持且つ決定資料の單位を持續する一つの實体を取扱う。生産函數はこの實体に對し定義が下され、且つ實体特有である。量的單位で測られるすべての因子は函數中に變數として現われる。(もし一つの「因子」がそのように可測でないならば、どうしてその使用が倍加されることが出來るか?) 企業が確定したる因子の總數から得られる極大生産高を、即ち企業が一つの同位保持單位として達成することの出來る因子の最良結合をその函數は表わす。函數の形は企業の同位保持力をそれ自身の環境の中に加える、即ちそれは形式上企業が成就を爲し得ることを示す。同位の模様はすべては函數の形の中に現われない。あるものは可測因子(例えばパンチを入れたカード設備の如き)として表わされる。しかし函數の形で示し得るに過ぎないもの——ある計量し得べからざる「因子」——が常にある。一つの極大にされた殘余又は余剩として、企業が獲得することの出來る純收入は因子供給の及び生産に對する需要の條件と共に生産函數で表わされた形式上の條件次第に依るものである。一つの企業の純收入は今一つのものと或はちがうかも知れぬ。何故ならそれは異つた供給需要條件に出逢うばかりでなくその生産函數が異なるからである。ここで指摘されるように、極大純收入の決定は二つの階段で示すことが出來る。第一はどんな生産尺度に對してもその中で因子が結合される割合を定める。第二は生産尺度を決定す

る。チェイムバリンの分析は今や高い地位につく。そして少しの點に於ても一つの特異な場合としてを除き、一次齊次生産函數の假定を余儀なくされる事を我々は感じないのである。〔Quarterly Journal of Economics, LXIII（二月、一九四九年）、一四三頁下欄、EDWARD H. CHAMBERLIN「批判に答えて」の注意7參照、尙本誌追記參照〕

生産函數は齊次でないから、單位費用曲線はよく知られているU型をとる事が出來る。「純粋な」競爭の下では生産物の價格は企業へ與えられるから、結合したる(1)と(2)の階段に對しては均衡は限界費用を價格に等しいようにする生産高で生ずる。これは偶然にを除いては極小單位費用の點ではない、そして企業の利潤を作る。（利潤は損失のこともあろうしかしその時は企業は結局廢業する。）一般の異論はこれは「純粋な」競爭と矛盾するということである。ここでの「純粋な」競爭の概念は右に用いられた（生産物の及び收受量の價格が企業へ與えられる處の）ものよりも明らかにより廣汎である。少し新しいものが加えられた、それは全く異つた性質の何か、即ち單位費用が極小であることを包含する企業の利潤が零であるという條件が新しく加えられた。これらの二つのどちら、零利潤か極小單位費用かが條件と見做さるべきであるかは必ずしも明確ではない。しかし、それはどちらなりと、論點を混亂させることにのみ役立つ一つの不適當な(7)附加物である。

(7)「純粋な」（"Pure"）競爭は正確に持込まれた（Chamberlin : The Theory of Monopolistic Competition 六頁乃至七頁）事は認めて差支えない、何故ならば「完全な」（"Perfect"）競爭の概念は余りに遠く標的を逸して變り易くなつてしまつたからである。それは其の後同一宿命を受けるように向つて行つてしまつた。

「純粋な」競爭（前記の意味における）下の又は他の條件下の企業の均衡を得てから、我々は實際に全く異つた分析、即ち(3)階段のそれへ進むことが出來る。ここには我々はどんな工業においても如何にして利潤の標準が決定されるかを明らかにしようと努める。特に、我々は外部の企業からのあり得べき競爭の「自由な入場」（"free entry"）に依るある條件を立てることが出來る。條件は限界企業に對する純收入は零で、從つてこの企業の生産高は極小單位費用であることを包含——これは必要ではないが——しても宜しい。しかしながら、サミュアルサンが指摘するように、利潤を零に追いつめる「競爭的」（"competitive"）力があることは實生活においては少しも經驗的證據がない。しかし「自由な

入場」の條件が當嵌まる方法が多くある。其等は生產物及び收受量の價格が決定される市場均衡のより廣汎な分析では附加することが出來るか、さもなくば沒却されるべき點を殘すことが出來る。

三、消費者需要に就いてのヒックスとサミュアルサン

消費者の需要の理論において、與えられた價格 $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ で市場について n 財を買い得る與えられた所得 I を有する唯一人の消費者がある。先ず、我々は消費者の需要が唯一通りに決定されるという事、即ち彼の購入量 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ は I, $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ の一價函數であるという事がいえるという事をいつて見度い。更に、需要は所得及びすべての價格が比例した變化に對し不變であるべきである。即ち、需要函數は零次の齊次である。次に、比較靜學の一問題として、我々は所得と價格とが變化するにつれ如何に需要が變化するかを追跡したいと思う。特に、これらの變化についての一般の制限、即ち（完全に）經驗的資料から確かめられるか反駁する事の出來た制限を求める。

我々は數個の組立て、又は一揃の假說があることを豫期しなければならぬ、それらは同種の現象を「說明する」（"explain"）のに役立つ。その時我々の選擇は最も簡單な模型に差し向けられねばならぬ。經濟學者として、我々は經驗的經濟的事實の一つの說明に對しては必要とされない複雜を持ち込もうとは望まない。特に、例えば、心理學者に訴えても宜しい消費者の行動の容貌には我々は何らの直接の關心を持たない。

消費者の需要の一つの說明は、どんな與えられた所得と價格に對してでも、選好尺度の上の極大水準において唯一組の購入量がある、ことを保證する特性を有する一つの順序を示す選好の場の假定に基礎がおかれている。ヒックスは如何に巧みにこれが解く事が出來るかを示した。一つの順序を示す効用函數に關して不變な、均衡を決定し如何にして必要とされる形の需要函數が現われるかを示す、或る**方程式**（equations）がある。その順序を示す効用函數に關して再び不變な、一つの極小よりもむしろ一つの極大を保證する、或る**不等式**（inequalities）がある。これらは所得及び價格が變化する時需要函數の變化についての制限に換言することが出來る。生產の理論における如く、これらの條件は問題の孰れか一方の定式化から得られる、即ち價格は各の場合において與えられたものとして、消費者は一つの與えられた所

得に對し効用を極大化するか與えられた効用水準に對し支出を極小化するかである。我々は說明の便宜に從つて定式化を選定する事が出來る。

ヒックスは彼の理論を展開するのに、彼は需要函數についての制限を得るのにすべての彼の不等式を用いる事が出來なかつた事實で狼狽した。ヒックスが(8)怪しいとにらみ出した事だが、今やサミュアルサンはきつちりと一つの不等式があり、そうして非常に簡單なもので、それから我々は需要上のすべての制限を得ることが出來ることを示した。この不等式は標準指數實行の方法で價格の種々の組での購入量の「反對の」(“cross”)評價次第で決まる。實に、この不等式は需要函數の分析に對してのみならず、尙指數理論及び其の他の(9)目的の爲にも基礎として役立つ。

(8) 前掲引用書五一頁乃至二頁、三一一頁及び附加注意A。

(9) J. R. Hicks: “The Valuation of the Social Income,” Economica (一九四〇年)、及び “Consumers' Surplus and Index Numbers,” Review of Economic Studies (一九四二年)

我々は消費者に就いて、添數0と1とで表わされる二つの均衡點を比較する。n財に就いての總和をΣと書く時、我々は先ず最初の價格での第二點の購入量の費用を第一點の購入量の實際の費用と比較する、即ち、我々は Σp_0x_1 を、Σp_0x_0 と比較する。もし $\Sigma p_0x_1 \leqq \Sigma p_0x_0$ とせば、その場合には其時役に立つ所得 (Σp_0x_0) を用いて第一の點で量 x_1 が購入する事が出來たのだが、然るに實際は量 x_0 が購入された。消費者は量 x_1 よりも量 x_0 を選ぶ。今一つは Σp_1x_0 と Σp_1x_1 との間の比較である。ここで、もし $\Sigma p_1x_0 \leqq \Sigma p_1x_1$ とせば、その時は消費者は量 x_0 よりも量 x_1 を選ぶ。首尾一貫せる消費者行動に關しては、もし最初の不等式が當て嵌まるとせば、第二は効用を維持出來ない、且つ逆も成立する。故に、$\Sigma p_0x_1 \leqq \Sigma p_0x_0$ は $\Sigma p_1x_0 > \Sigma p_1x_1$ を暗々裡に意味する。これを有限差の形に換言すれば

もし $\Sigma p\Delta x \leqq 0$ ならば、その時は $\Sigma(p+\Delta p)\Delta x > 0$ ……(1)

となる。但し、Δp, Δx は一點からも一つの點への變化である。(1)はサミュアルサンが理論の基礎である事を示す不等式條件である。

斯くて(1)へ通じている最後の段は、サミュアルサンが「顯示された選好」(“revealed preferences”)と呼ぶものを

除いては、決して一つの効用函數又は一つの選好尺度に歸さない。もし我々が單に我々の基礎假定として(1)を放棄する——そしてそれは經驗的資料から（觀念上）反駁し得べき一つの形式になつている——ならば、その場合は我々は實際に欲するすべてのものを得る。第一に、自然と需要函數は一意的で(1)零次の齊次であることになる。第二に(1)に含まれる一つの特別な場合は

もし $\Sigma p\Delta x=0$ ならば、その時は $\Sigma\Delta p\Delta x<0$ ……(2)

である。この意味は入念に吟味する必要がある。そこには價格變化（Δp）があつた。そこには又消費者の所得の中に一つの變化

$$\Delta I=\Sigma(p+\Delta p)(x+\Delta x)-\Sigma px=\Sigma x\Delta p$$

があつた、即ち、價格變化は所得の中の一つの變化 $\Sigma x\Delta p$ によつて代償された。今購入された量（代償價格變化に伴う所の）から古い價格及び所得即ち $\Sigma(x+\Delta x)p=\Sigma xp$ で買うことが出來た代償をした。このような代償價格變化に對しては、$\Sigma\Delta p\Delta x<0$. もし價格變化がすべて高値に向う（又は幾部分かは高騰し及び他は不變）ならば、その場合は我々はすべての需要は減少されるという事は出來ないが我々は差引して需要に一つの減少があるという事が出來る。特に、所得における一つの増加（$x\Delta p$）によつて代償される一つの價格だけに騰貴（Δp）がある（他の價格は變化されない）ならば、その場合はその財としては需要が減ずる。(2)結局、微分と變化率とを持つた極限形式では、(2)はもし $\Sigma pdx=0$ ならば $\Sigma dpdx<0$ となり、それ故に $dI=\Sigma xdp$ は所得における代償變化である。故に

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial x_s}{\partial p_r}+x_r\frac{\partial x_s}{\partial I}\right)dp_r\,dp_s<0 \quad\cdots\cdots(3)$$

我々はこれからよく知られている問題を論ずる。(3)から、もし p_r だけが變化すれば、その時はヒックスの代替效果である

$$\frac{\partial x_r}{\partial p_r}+x_r\frac{\partial x_r}{\partial I}<0$$

他の一方において、ヒックスの補完關係である

$$\left(\frac{\partial x_s}{\partial p_r}+x_r\frac{\partial x_s}{\partial I}\right)$$

は孰れもの符號のものであり得る。これらの式は、勿論、需要におけるスルツキー（Slutsky）の代償變動である。

（１）サミュアルサン、前掲引用書、一一二頁－一一三頁。

（２）もし我々が一つの整列する選考の場の假定の入ることを許すならば、その時はもう一つの代償價格變化、即ち同一無差別曲面上に消費者を保持するに足る所得における變化を伴う價格における變化がある。本文の代償價格變化は同一無差別曲面でない同一價格平面上に消費者を保持する。二つの代償は以上のように有限な變化に對して相異なるものである。其等は微分變化に對して一致する。しかしながら、$\Sigma \Delta p \Delta x < 0$ は一様に兩者に對して適用出來る事を示すことが出來る。サミュアルサンは此の場合に區別をつけない。

是を以て、我々が需要に關して必要とするものはすべて唯一の條件 (1) から出ているように私には思われる。無差別曲線群を假定したり又は消費者が効用を極大化するか支出を極小化するように行動することを假定する事は必要とすべくもない。我々は條件 (1) に集中し且つ古風な効用分析を振り離すことによつてずいぶん良くなる。先ず其の一を擧げるなら、我々は單一價格における變動については需要の彈力性の概念を捨てる、それはすべての價格を同時に變化せしめることが實際より容易である。更に進んで、我々は有限の變化で（且つ變化率でばかりではない）操作することが出來それ故經驗的試驗により近く接近する事が分かる。一例を取ると、我々は一人の消費者から消費者の全体へ (1) を擴張するのに (3) ヒックスに則ることが出來る。もし $\Sigma p_0 x_1 < \Sigma p_0 x_0$ と $\Sigma p_1 x_0 > \Sigma p_1 x_1$ とが共に眞なることが分れば、その時は (1) は滿足される。我々は消費者の態度は二つの時期で矛盾せぬことが分り且つそこには實質社會所得に下落があつたということが出來る。他方に於て、我々は (1) と矛盾する $\Sigma p_0 x_1 < \Sigma p_0 x_0$ と $\Sigma p_1 x_0 < \Sigma p_1 x_1$ があるのを見ることが出來た、何かが二つの時期の間で偶然に消費者の態度の模型を變えるようにした。これは新厚生經濟學（New Welfare Economics）における１つの課題である。

（３）"The Valuation of the Social Income," Economica（一九四〇年）

しかし結局我々は全く効用分析を不用物として棄てるべきであるという事になるか？我々はあまりに性急であつてはならない。我々はヒックス及び其の他の人々によつて展開されたように、少くとも叙述及び解釋の爲に効用分析を其儘

に保持すべきであるという事を私は考えたがる方である。今しがた言つた矛盾をつきつけられる時は、消費者の無差別曲線群が多分變化したように思われるという事が出來る事は有用なことである。代償された價格が變化する時、與えられた効用水準の維持に對應して (3) に於ける有名な項を敍述する事が出來ることは有用なことである。價格におけるどんな變化でも總て無差別曲面に沿う一つの變化（代替効果）とすべての價格における一つの比例した變化（所得効果）に適當に區劃される。

四、サミュアルサンの動學—定差方程式

今までの所では、均衡點は極大（極小）の條件から得られた。一つの極小よりも寧ろ一つの極大（又は轉倒して）を保証する不等式はその時比較靜學における效力ある結果を與える。分析の數學は大部分二次形式の理論に懸る。不等式は安定條件であり且それらは、暗々裡を除き、動學的として記述され得る考慮を含まない。

その他の問題では、均衡點は極大（極小）の條件からではなくて、ある變數の方程式から生ずる。比較靜學の問題は式で示すことがより困難であり且つ（サミュアルサンが示すように）判然と動學的模型に基礎を置かねばならぬ安定條件を含む。一つの典型な場合は一市場の需要と供給の方程式であり、そして安定の考察はよく知られている「蛛巢」（"cobweb"）の定理に導くことが出來る。動學的体系は正しく（例えば）產業變動の理論における程比較靜學の中に必要とされる。

サミュアルサンが採用した動學の定義はフリッシュ（**Frisch**）の流を汲む。「もしも時の始めから終りまでその態度が『異時點における變數』が一つの『本質的な』(4)方法中に含まれるような函數方程式によつて決定されるならば」(**"if its behavior over time is determined by functional equations in which 'Variables at different points of time' are involved in an 'essential' way."**) それ故に、數學者の見地からは、動學的關係は實質上定差方程式である。時としては有限差を變化率によつて、又和を積分によつて置き代えるために、連續を導入することが適當であるかも知れぬ。その時は關係は微分、積分又は混合された方程式である。しかしながら、物理學では微分又は積分方程式が通例適當であ

るのに反して、これは經濟學ではしばしばそんな事がより少いらしい。丘下に轉がされつつある一つの球はそれが麓に達するまで轉がり續けるであろう。しかしながら、株式取引所での價格の最も急速な崩落の時でさえも、價格は一定時點で値段を下げるに過ぎず且つ取引は仕舞い時刻に於て未決の儘にして置かれる。

（4）サミュアルサン、前掲引用書、三一四頁

以上のように經濟動學はしつかりと定差方程式の理論に基礎を置かねばならぬ。今までこのような理論は經濟學者に少しも利用し得られなかつた。サミュアルサンは一つの長い數學附錄中にその不足を補足する。しかしそれは非常に骨の折れる道具合である、稍叙述が形式的で經濟學者の關心を繼持するためにあててある說明的例題を欠くためである。例題は一般方法を說明するのにばかりでなく、現實の定差方程式が如何にして經濟問題に現われるかを示すのに有用である。左記の例題はそれらがサミュアルサンの形式的展開の跡をつけるための經濟學者に加勢するかも知れぬと思つて提出される。

一つの定差方程式は異時點での變數を含む。恐らくは最も簡單な例題は每年複利利殖される年當り $100r$ パーセントの利子の合計の增加である。もし $y(t)$ が年 t の末での總額であるならば、その時は

$$y(t+1)=(1+r)y(t) \quad \cdots\cdots(4)$$

この關係は二つの時點又は一つの時の後れ(time lag)、それは第一階の一つの定差方程式である。それは又 $y(t)$ と $y(t+1)$ だけ現われ、且**べき**、その他が現われないから線型である。最后に、時が判然と現われないから非歷史的である、關係が日附をされないでどんな二つの引續く年に對してでも皆適用し得る。(4) の一つの一般解は t の一つの函數としての y の一つの式である、そしてそれは指定された唯一つの初期條件、即ち体系を「發動し始める」("start up") に役立つ一つの條件を一回書くことが出來る。最初の金額 y_0 を指定するものと假定すれば、次の一歩一歩の解が得られる、

$$y(0)=y_0;\ y(1)=(1+r)y(0)=y_0(1+r);$$

$$y(2)=(1+r)y(1)=y_0(1+r)^2;\cdots\cdots$$

且つ一般に　$$y(t)=y_0(1+r)^t$$

定差方程式が變數 y を含まない一つの項を持つとき僅かにより複雜した場合が生ずる。例えば、複利の問題で a なる一つの一定した割増金が年毎に加わると假定する。その時は $y(t+1)$ は $(1+r)y(t)$ と a との和である、即ち、定差方程式は

$$y(t+1)-(1+r)y(t)=a \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

である。同一の初期條件を用いると、一歩一歩の解は今

$$y(t)=y_0(1+r)^t+a(1+r)^{t-1}+a(1+r)^{t-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a$$

又は　$$y(t)=y_0(1+r)^t+\frac{a}{r}[(1+r)^t-1]$$

である。(5) の一般解は二つの部分から成つている。一つの部分は「縮められた方程式」("reduced equation") $y(t+1)-(1+r)y(t)=0$ の一般解である $y_0(1+r)$ である。も一つの部分は完全な方程式(5)(5)の一つの特別解であるように引合わせる事の出來る $\frac{a}{r}[(1+r)-1]$ である。これは實に定差方程式を解くための重要な作業規則の一つであることを遠廻しに言う。(5) を解くには、先ず試行錯誤によつてそれのある特別解を見つけ、そこで一般解を得るために一層簡單な方程式 (4) の解を附加する。

（5）$y(t)=\frac{a}{r}[(1+r)^t-1]$,　$y(t+1)=\frac{a}{r}[(1+r)^{t+1}-1]$ と置くときは

$$y(t+1)-(1+r)y(t)=\frac{a}{r}[(1+r)^{t+1}-1]-\frac{a}{r}[(1+r)^{t+1}-(1+r)]=a$$

定差方程式が判然と時を含んでいる歴史的である時は一つの更に一歩を進めた複雜が生ずる。(5)に於けるように一つの割増金が各年加えられるがその金額は年々言明されると假定せよ。一九二九年が金額 y_0 が複利で課せられる時の最初の年 $(t=0)$ であるとする。歴史の一資料として、言明された割増金は一九三〇年 $(t=1)$ では a_1、一九三一年 $(t=2)$ では a_2、…………とする。そのときは

$$y(t+1)-(1+r)y(t)=a_{t+1} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

は定差方程式である。解は一歩一歩

$$y(t)=y_0(1+r)^t+a_1(1+r)^{t-1}+a_2(1+r)^{t-2}+\cdots\cdots\cdots+a_t$$

なることが見出される。(6)の解は同一の「縮められた方程式」の解と割増金の歴史的流れに依存する一つの特別解との和である。

次に我々は二つ（又はより多く）の時の後れを含む階數が二（又はより高い）の一つの定差方程式へ移ることが出來る。有名なユール（Yule）とケンダル（Kendall）の(6)自己退化体系（Auto-regressive system）は一つの例証を供給する。

二階の場合は、線型では、

$$y(t+2)+ay(t+1)+by(t)=\varepsilon_{t+2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

である。但し a と b とは体系の建築物の定數であり、且つ ε_{t+2} は一つの歴史的攪亂である。問題になつている項に特有な一つの攪亂が加えられるの外は、系列にあるどんな項でも二つの先だつ項で決定される。攪亂がなければ、非歴史的形式

$$y(t+2)+ay(t+1)+by(t)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

が得られる。ここの(8)は(7)に對應する「縮められた方程式」である。着手の方法は前の通りである。我々は縮められた方程式(8)の一つの一般解、建築用定數 a と b だけを含むが系列を「發動し始める」ための二つの初期條件、例えば $y(0)=y_0$ 及び $y(1)=y_1$ を必要とする一つの解、を捜し出す。次に、我々は完全な方程式(7)のある特別解を得るように努める。この二つの和は(7)の一般解を與える。そのとき、一般解は歴史的攪亂に無關係な一つの系統ある部分と歴史的に生ずる部分から成る。最初の部分で我々が求めるものは槪して一つの減衰振動である。この種の体系は明らかに産業變動の理論に適當である。

(6) M. G. Kendall : Contributions to the Study of Oscillatory Time Series (Cambridge, England, 一九四六年) 參照

この一般方法は微分方程式の理論の中に採用されたものに非常に類似している。一つの一意解が(7)存在することを

立証する若干の多少形式的な「存在」("existence") 定理がある。實際に、例えば、(8) の一般解に加えるべき (7) のある特別解を捜し出すには、成功は手品の一つの箱を極度にまで驗めることによつて定まる。それは全くどちらかといえば斷片的であり且つ伸るか反るかである。しかしながら、定差方程式を用いれば、我々は常に特定な定差方程式によつて與えられ、指定された初期條件から出發する、變數の道程を追跡するための一歩一歩方法の助けを藉りることが出來る。

（７） 定差方程式に關する存在定理は正確にいえばサミュアルサンにより曲解されている、例えば、前掲引用書、三八五頁。

「運算符號」("operators") の使用は非常に役に立つ。E を $y(t)$ を $y(t+1)$ に變ぜしめる一つの運算符號であるとする、即ち $Ey(t)=y(t+1)$. その時は $E^2y(t)=Ey(t+1)=y(t+2)$, 等。Δ を定差に對する通例の運算符號とせよ。その時は $\Delta y(t)=y(t+1)-y(t)$; $\Delta^2y(t)=\Delta y(t+1)-\Delta y(t)=y(t+2)-2y(t+1)+y(t)$, 等。どんな定差方程式も E の仕方で及び Δ で二者の中の一を選ぶ様に表示することが出來る。方程式 (4) は

$$[E-(1+r)]y(t)=0 \quad \text{又は} \quad (\Delta-r)y(t)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

と書くことが出來る。方程式 (8) は

$$(E^2+aE+b)y(t)=0 \quad \text{又は}$$

$$[\Delta^2+(a+2)\Delta+(a+b+1)]y(t)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

と書くことが出來る。第二の形を得ようとするには、若干の項の再整備が各の場合に必要とされる。しかし實際に運算符號の利用はそれらが恰かも量であるかの如く取扱う事が出來るという事實から生ずる。定義により

$$\Delta y(t)=(E-1)y(t)$$

我々は $\Delta=E-1$ 又は $E=\Delta+1$ と書き一つの形式での方程式をもう一つへ變形することが出來る。そこで (10) では

$$E^2+aE+b=(\Delta+1)^2+a(\Delta+1)+b=\Delta^2+(a+2)\Delta+(a+b+1)$$

有限差の項で書かれた一つの定差方程式（運算符號 Δ を用いて）は運算符號が $D=\frac{d}{dt}$ である微分方程式に類似した形をしている事は注目さるべきである。例えば、毎年複利利殖される利子に對する定差方程式は $\Delta y(t)=ry(t)$ であ

る。これに對應する連續的に複利利殖される利子に對する微分方程式は $Dy(t)=ry(t)$ である。

比較靜學に於ける一つの問題の動學的定式化の中に起る定差方程式の性質はサミュアルサンによつて用いられた一つの簡單にされた例題で說明することが出來る。單一財に對する市場での均衡は需要と供給の方程式で決まる、均衡價格 $\bar{p}$ は $D(p)=S(p)$ の一つの解である。もし價格が最初に $p_0(\neq\bar{p})$ で定置されるならば、時全体を通じて何が偶然起るか？この問題の多くの相異なる動學的定式化の中で、二つがここで注意すべきである。第一に、我々は價格は需要が供給を凌駕している間は騰貴するであろうし、且つ供給が需要を凌駕している間は下落するであろうという假定で着手する。我々は落着きの速さは需要と供給との差に比例するという一つの假定、それは連續的變化を含むが、を附加する。一つの微分方程式は動學的關係の適當な式であり、展開によつて近似的には

$$\frac{dp}{dt}=\lambda[D(p)-S(p)]=\lambda[D'(\bar{p})-S'(\bar{p})](p-\bar{p}).$$

ここで λ は落着きの速さで正の數である。方程式は $S'(\bar{p})$ が $D'(\bar{p})$ より大か小かに依つて p は連續的に $\bar{p}$ に向つて又は $\bar{p}$ から立去ることを示すように容易に解かれる。微分方程式は何とか連續的移動だけを許し且つ振動する移動の可能性の入ることを禁ずることは、それらの一つの特色（例えばこの事）である。この理由のためにのみ、それらは全くは經濟動學には適當ではない。

第二に、我々は需要はそれ自身を直ちに價格へ合わせるが供給は一つの時の後れの後にのみ變化を受ける事を假定して議論を進める。$p(t)$ が時 t での價格である時は時 $(t+1)$ での供給は $S[p(t)]$ である。時 $(t+1)$ での需要は $D[p(t+1)]$ であり且つ $p(t+1)$ は供給を明らかにするために取付けたのである。即ち

$$D[p(t+1)]=S[p(t)]$$

これは、一つの與えられた最初の價格 p_0 から、定差方程式が時全体に亘つて發展する時一歩一歩價格 $p(t)$ を與える一つの定差方程式である。一次の需要及び供給（定數 α, β, a 及び b をもつ）という特別な場合には

$$\alpha-\beta p(t+1)=a+bp(t)$$

即ち

$$p(t+1)+\frac{b}{\beta}\,p(t)=\frac{\alpha-a}{\beta}$$

となり、(5)と同一型の一つの線型定差方程式である。解は容易に得られるが、あり得べきことのより大きい範圍を與えてくれている、特に、pは$\bar{p}$のまわりに、$\bar{p}$に向つて又は$\bar{p}$から離れて振動することが出來る。これがよく知られている「蛛巣」結果である。

この例題はサミュアルサンの著作の限界を暗示している。何故時（$t+1$）での供給が時tでの價格によつて定まるべきか？それは時tに於いて供給者が時（$t+1$）に於てあろうとしていた價格を豫期した（expected）事によつて定まり且つ又その豫期は時tでの價格によつて定まると我々は恐らく言うかも知れぬ。しかし豫期は又他の事情にも依存する。豫期の概念はサミュアルサンの理論には少しも目立つ箇所を捜し出さぬ一つである。彼は安定條件の動學的定式化を含む、比較靜學の一つの廣汎な且つ申分のない論述を與えている。しかし彼は豫期に基礎が置かれたヒックスの分析のようなものは少しも備えない。より廣義な經濟動學に就いて、且つ特に景氣循環論に就いては、彼は何がなさるべきであるかの若干の指示を以て足れりとしている、そして特に數學者へ興味のある重要な提言をしている。彼は時全体を通じて一つの經濟体系の全進路がある變化によつて變化する事が出來る（例えば、消費の限界傾向における）比較動學の殆んど未知の受持區域を探究することの必要を指摘する。彼は非線型の定差又は微分方程式の及び統計（stochastic（ストカスティク））要素をもつ体系の可能の重要を力說する。我々は今困難な問題を提出ししかも尙系統的發展を待ちつつある一つの數學的領域の中に居る。

過去の數理經濟學は一次系なる數學的便宜によつて支配された。一次の假定は恐らく經濟動學の取扱いには適當でないように思われる。もし左樣ならば、どれか他の單純化が數學があまり形式的にならないようにするために必要とされる。誰もまだ適當な單純化を考えついたものはない。そこには經濟學者と同樣數學者によつて爲されるべき多くのものがある。

〔追記〕　私（チェイムバリン）はヒックスとサミュアルサンの定式化に關しての問題のアラン氏の簡短な議論に就いて一言の論評を加えたいものである。（a）もしすべての因子が包含されないならば（サミュアルサン）、又は（b）もし一因子が一定の儘で

あるならば（ヒックス）、何故「すべての因子の使用を二倍にすることは生產高を倍加しない」について二つの說明が與えられることは、勿論、成程申分のない尤もなことである。しかしこれらの可能性だけを承認することは危險なそして誤れる方向に導くような氣がする、といふのはそれはもしすべての因子が（a）含まれ且つ（b）變數であつたとすれば、函數は一次で齊次であつたであらうことをそれとなく言う、そして私が主張することは全く根據のないこととなるからである。もし因子を除くことかそれらのあるものを一定の儘にして置くというようなかかる便法が「曲線を上に向けさせる」ために避くべからざるものであるならば、私は我々が同意するように思われる所のものは棄てられねばならぬ一次齊次生產函數は一つの長期間の且つ健康な存續をするであらうことを豫言する。何故ならば、かかる命題は居合わせた且つ連續的に變り易いすべての因子を持ち合わせて（それは最も「一般な」假定であるように思われる）函數が齊次であるという暗々裡の承認を構成するからである。それは明らかに私の分析中に與えられたものとは完全に異つた曲線の落下部分の一つの說明をも包含している。